



Ausbildung – Vorbereitungskurse

Fachdossier Mathematik

Niveau II

Anforderungen im Fachbereich Mathematik für die Eintrittsprüfung Niveau II
an die Pädagogische Hochschule Luzern (PHLU)

Änderungskontrolle

Version	Datum	Visum	Bemerkung zur Art der Änderung
11/18	16.11.2018	Michel Hauswirth	Aktualisierung Prüfungsreglement / Layout
11/20	30.11.2020	Martin Sprecher	Aktualisierung Literaturliste
01/24	24.01.2024	Urs Krummenacher	Anpassungen an LP 21

www.phlu.ch/vorbereitungskurse

PH Luzern · Pädagogische Hochschule Luzern
Ausbildung
Vorbereitungskurse
Pfistergasse 20 · Postfach 7660 · 6000 Luzern 7
T +41 (0)41 203 01 35
bruno.rihs@phlu.ch · www.phlu.ch

Urs Krummenacher / Martin Sprecher

Inhaltsverzeichnis

1	Lernziele.....	4
2	Kompetenzen und Inhalte	4
3	Empfohlene Vorbereitung / Literatur	5
4	Prüfungsmodalitäten und Bewertungskriterien	6
5	Musteraufgaben	7
6	Musteraufgaben Lösungen	13

Fachdossier Mathematik

1 Lernziele

- Zentrale Begriffe, Ergebnisse und Methoden aus der Algebra, Geometrie, Stochastik und Analysis kennen
- Die Formelsprache sowie wichtige Rechentechniken beherrschen
- Problemlösestrategien kennen und anwenden
- Sach- und innermathematische Probleme erfassen, mathematisieren und modellieren
- Ergebnisse interpretieren und Methoden beurteilen
- Geometrische Situationen in der Ebene und im Raum vorstellen und darstellen können
- (Technische) Hilfsmittel zweckmässig einsetzen

2 Kompetenzen und Inhalte

- A. Der Vorbereitungskurs II im Fach Mathematik baut auf den erweiterten Kompetenzen in allen drei Kompetenzbereichen des Lehrplans 21 am Ende des Zyklus 3 auf und orientiert sich an den Inhalten der Volksschule bis Ende der 9. Klasse im Niveau A der Sekundarstufe I.**

Zahl und Variable

- Grundbegriffe der Zahlentheorie (Teiler, Vielfache, ggT, kgV, Primzahlen usw.)
- Grundoperationen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen; Potenzrechnen, Wurzeln mit TR
- Prozent- und Zinsrechnen
- Termumformungen, binomische Formeln und Faktorzerlegung

Form und Raum

- Wichtige geometrische Ortslinien (Kreis, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Mittelparallele)
- Eigenschaften, Umfang und Fläche der ebenen Figuren Dreieck und Viereck mit allen Spezialfällen
- Satz von Pythagoras und Höhensatz
- Umfang und Flächeninhalt eines Kreises
- Ähnlichkeit und Strahlensätze
- Eigenschaften, Umfang, Fläche und Volumen der Körper Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel

Grössen, Funktionen, Daten und Zufall

- Berechnungen mit einfachen und zusammengesetzten Masszahlen
- Proportionalität, lineare Funktion, indirekte Proportionalität, (einfache) Quadratfunktion
- Darstellung funktionaler Zusammenhänge (Sachtext, Tabelle, Diagramm, Term)
- Daten (Erhebung, Darstellung, Beschreibung und Interpretation)
- Zufallsversuche, absolute und relative Häufigkeit
- Abzählende Kombinatorik

- B. Für die Eintrittsprüfung werden Kenntnisse und Fähigkeiten in folgenden Stoffbereichen erwartet:**

Aus der Algebra

- Lineare Gleichungssysteme mit bis zu drei Variablen lösen und die Lösungsmethode beschreiben.
- Quadratische Gleichungen lösen und quadratische Funktionen darstellen. Anzahl Lösungen von quadratischen Gleichungen in vielfältigen Anwendungen beurteilen.
- Die Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln anwenden und Gleichungen mit entsprechenden Termen lösen.

Aus der Analysis

- Den Funktionsbegriff verstehen und verschiedene Darstellungen kennen.
- Die Definition der Ableitung verstehen und grafisch interpretieren.
- Die Definition der Stammfunktion und ihre Anwendung bei Flächen- und Volumenberechnungen verstehen.
- Die Ableitungsfunktion mit Hilfe der Ableitungsregeln (Summen-, Produkt, Quotienten- und Kettenregel) und Stammfunktionen von Funktionen bilden.
- Vollständige Kurvendiskussion (Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Asymptoten, Graf) mit folgenden Funktionen durchführen: Polynomfunktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen.
- Mathematische Modellierung (anwendungsorientierter) Steckbriefaufgaben zu ganzrationalen Funktionen vornehmen.
- Den Einfluss von Parametern untersuchen.
- Die Ableitung zur Lösung von Extremalproblemen anwenden.
- Folgen und Reihen als Instrument der Modellbildung erkennen und anwenden.

Aus der Geometrie

- Die Eigenschaften von kongruenten und ähnlichen Figuren kennen und anwenden
- Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis erklären und anwenden
- Trigonometrische Aufgaben in rechtwinkligen und nicht-rechtwinkligen Dreiecken lösen

Aus der Stochastik

- Elementare Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung lösen mit Hilfe von
 - Ereignissen, universelle (disjunkte) Ereignisse, Gegenereignis, unabhängige Ereignisse
 - Vereinigung und Schnitt von Ereignissen
 - Laplace - Experimenten
 - Bernoulli - Experimenten
 - mehrstufigen Zufallsexperimenten
 - der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeit

3 Empfohlene Vorbereitung / Literatur

Folgende Bücher enthalten Abschnitte, die die oben erwähnten Inhalte abdecken:

- **Fundamentum Mathematik und Physik**; Formeln, Begriffe, Tabellen, Orell Füssli, 2019; ISBN 978-3-280-04192-5
- **DUDEN Mathematik**; Basiswissen Schule 5. bis 10. Klasse, Bibliographisches Institut, 2017; ISBN 978-3-411-71506-0
- **DUDEN Mathematik**; Basiswissen Schule Abitur Buch, Bibliographisches Institut, 2020; ISBN 978-3-411-71745-3
- **Algebra 1 und 2**; Deller, Gebauer, Zinn; Orell Füssli, 2018 und 2017; ISBN 978-3-280-02795-0 und 978-3-280-02797-4
- **Mathematik: Band 1 – Analysis**; Bigalke/Köhler, Cornelsen Verlag, 2018; ISBN 978-3-06-000478-2
- **Mathematik: Band 2 - Analytische Geometrie, Stochastik**; Bigalke/Köhler, Cornelsen Verlag, 2010; ISBN 978-3-06-000479-9
- **Wahrscheinlichkeitsrechnung und beschreibende Statistik**, Compendio Bildungsmedien, 2008; ISBN 978-3-715-59352-4

4 Prüfungsmodalitäten und Bewertungskriterien

Prüfungsform schriftlich

Zeit 180 Minuten

Hilfsmittel TI-30 (**nicht TX-30 Pro**) oder vergleichbarer Typ (nicht grafikfähig, nicht programmierbar); Formelsammlung (Fundamentum oder vergleichbar), eine A4-Seite Zusammenfassung¹ (diese Zusammenfassung wird zusammen mit der Prüfung abgegeben)

Beachten Sie

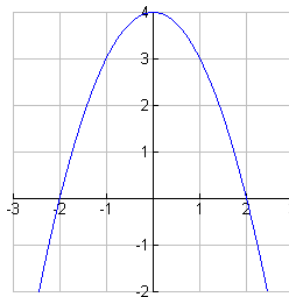
- der Lösungsweg ist genau zu dokumentieren.
- Der Notenmassstab ist linear. Es wird mathematisch auf halbe Noten gerundet. Die Note wird gemäss folgender Formel berechnet: $\text{Anzahl erreichte Punkte} / (0.9 * \text{Maximalpunktzahl}) * 5 + 1$.
- Die Musterprüfung macht deutlich, dass nicht der Stoff aus der Volksschule, wie er unter A (siehe Kapitel 2 – Inhalte A.) aufgeführt ist, sondern die zusätzlichen Kenntnisse und Fertigkeiten unter B (siehe Kapitel 2 Inhalte B.) geprüft werden.
- Aus der Tatsache, dass einzelne Themen in der Musterprüfung nicht vorkommen, darf aber nicht geschlossen werden, dass sie nicht prüfungsrelevant sind! Die Musterprüfung deckt einen Ausschnitt aus allen möglichen Themen ab. Sie soll Ihnen einen Eindruck vermitteln, wie die Zulassungsprüfung aufgebaut ist.

¹ Das heisst, eine eigene, von Hand geschriebene Formelsammlung, welche mit Erweiterungen angereichert sein darf, die nicht in der Formelsammlung stehen, vorausgesetzt, dass keine gelösten Beispiele notiert werden.

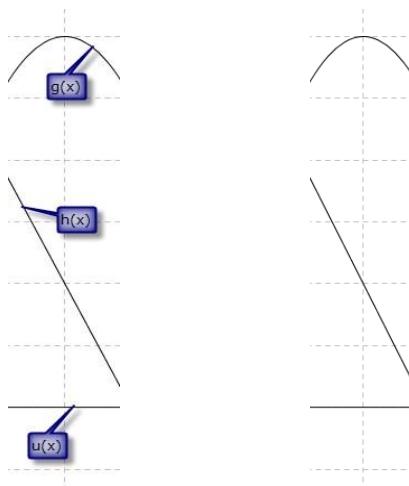
5 Musteraufgaben

Aufgabe 1 – Analysis – Differentialrechnung

- a) [4 P] Der Graph einer **ganzrationalen Funktion vierten Grades** ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, schneidet diese bei 2 und hat in $M(2/4)$ ein Maximum. Schreiben Sie nur die **Bedingungen** (z.B. $f'(3) = 2$, falls die Steigung an der Stelle $x = 3$ den Wert 2 hat) **und** das zugehörige **Gleichungssystem** auf. Das Gleichungssystem muss **nicht** gelöst werden.
- b) [4 P] Gegeben ist die **Funktionenschar** $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie die Extrema dieser Funktion **in Abhängigkeit von t**. Geben Sie **in Abhängigkeit von t** an, um was für ein Extremum (Hoch- oder Tiefpunkt) es sich handelt.
- c) [4 P] Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$. Dem Graphen dieser Funktion (siehe Abbildung unten) soll ein Rechteck mit möglichst **grossem Umfang einbeschrieben** werden, dessen eine Seite auf der **x-Achse** und eine auf der **y-Achse** liegt. Berechnen Sie Länge und Breite dieses Rechtecks.



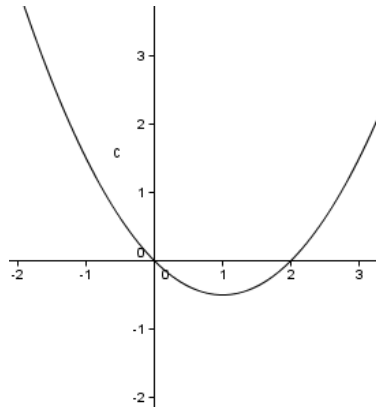
- d) [1.5 P] Unten abgebildet sehen Sie die Graphen einer Funktion $h(x)$, $g(x)$ und $u(x)$. Ordnen Sie der Abbildung rechts die Begriffe **$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$** so zu, dass $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ und $f''(x)$ die zweite Ableitung von $f(x)$ sein könnte und zeichnen Sie die x-Achse ein. **Begründen Sie** in je einem Satz Ihre Wahl für $f'(x)$ und $f''(x)$.



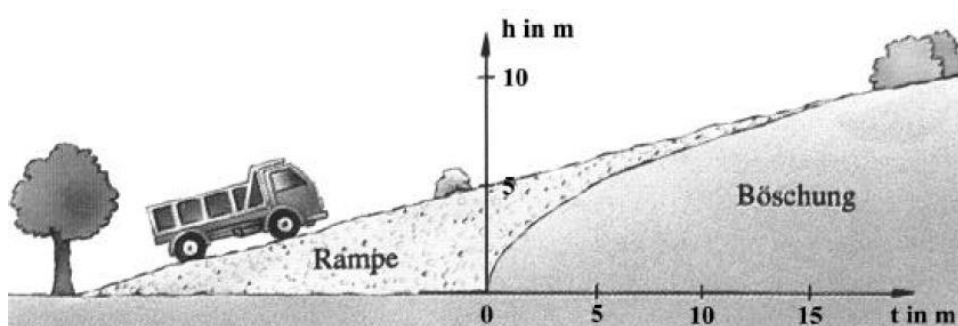
Aufgabe 2 – Analysis – Integralrechnung

- a) **[4 P]** Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^2 - x$ mit $a > 0$. Für welches a beträgt der Flächeninhalt unter der Kurve bis zur x-Achse $\frac{8}{3}$.

Unten abgebildet sehen Sie den Graphen der Funktion mit $a = 0.5$.

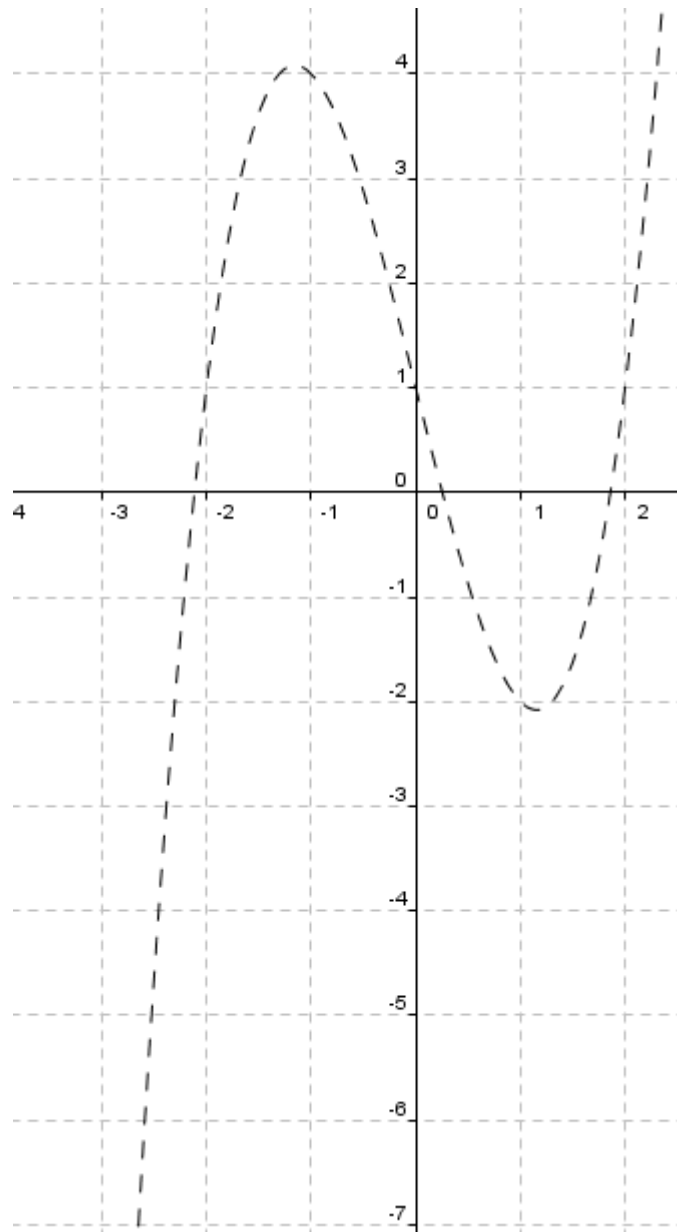


- b) **[4 P]** Das Profil der in der Abbildung gezeichneten Böschung wird durch eine Funktion mit dem Funktionsterm $h(t) = \sqrt{5t}$ beschrieben. Vom Punkt $P(20 / \dots)$ aus soll an die Böschung eine Rampe angeschüttet werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Rampe und schliesslich die Länge der Rampe.



c) Unten abgebildet sehen Sie den Graphen der ersten Ableitung f' . Nehmen Sie Stellung zu folgenden Behauptungen und begründen Sie.

- i. **[2 P]** Der Graph der Funktion f hat zwei Hochpunkte.
- ii. **[1 P]** Es gilt $f(0) = 1$.
- iii. **[2 P]** Der Graph der zweiten Ableitung nimmt im Intervall $[-2; 0]$ keine negativen Werte an.
- iv. **[2 P]** Der Graph von f besitzt im Intervall $[0; 2]$ eine Tangente, die parallel zur Geraden $y = 4x - 2$ verläuft.



- v. **[2 P]** Skizzieren Sie den Graphen von f'' und f mit $f(0) = -1$.

Aufgabe 3 – Wahrscheinlichkeitsrechnung

Felix behauptet stolz, er könne das Muster (Herz, Karo, Pik, Kreuz) der nächsten Karte in einem Kartenstapel vorhersagen. Trudi ist skeptisch und geht davon aus, dass Felix einfach rät.

- [2 P]** Trudi testet Felix und zieht **6 Karten**. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Felix **mindestens 5 Muster richtig** voraussagt, unter der Annahme, dass er einfach rät?
- [2 P]** Trudi testet Felix ein zweites Mal. Nun muss Felix **10 Karten** erraten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **mindestens ein Muster nicht richtig** erkennt unter der Annahme, dass er keine übersinnlichen Fähigkeiten hat und einfach rät?
- [4 P]** Trudi testet Felix ein drittes Mal. Nun mit **zwei Karten**. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Felix **die zweite Karte richtig** beantwortet **unter der Bedingung**, dass **die erste schon richtig** war, wenn man wieder annimmt, dass Felix einfach rät?
- [3 P]** Trudi testet Felix ein viertes und letztes Mal mit 3 Karten. Felix weiss, dass sie eine Herz-, eine Karo- und eine Kreuzkarte hat. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens zwei richtig errät, wenn die geratene Karte **nicht** zum Stapel zurückgelegt wird und er auch diesmal einfach rät?

Aufgabe 4 – Wahrscheinlichkeitsrechnung

In wenigen Tagen beginnt die Fussballweltmeisterschaft in Brasilien. Die Schweiz hat sich erfreulicherweise qualifiziert und spielt in der Gruppe E (siehe Abbildung rechts). In der Vorrunde spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere. Die Schweiz hat somit 3 Spiele in der Vorrunde. Ein Sieg ergibt drei Punkte, ein Unentschieden einen Punkt und eine Niederlage Null Punkte. Die Tabelle unten zeigt, wie gross die Wahrscheinlichkeiten für Sieg, Unentschieden und Niederlage gegen die jeweiligen Mannschaften ist.

GRUPPE E	
Team	P
 SUI	0
 ECU	0
 FRA	0
 HON	0

	Sieg	Unentschieden	Niederlage
Schweiz – Honduras	50%	20%	30%
Schweiz – Frankreich	30%	30%	40%
Schweiz – Ecuador	60%	20%	20%

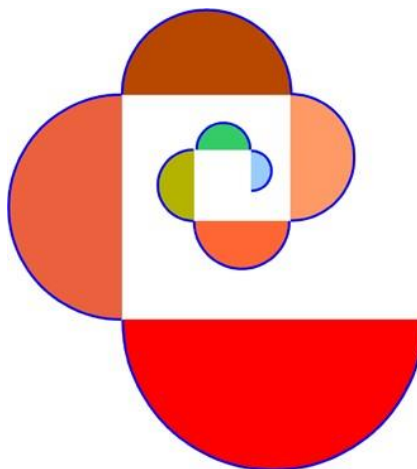
- [2 P]** Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Schweiz in der Vorrunde mehr als 5 Punkte erzielen?
- [2 P]** Wir nehmen an, dass sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten in obiger Tabelle nicht ändern. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Schweiz bei 8 Spielen gegen Frankreich mindestens zweimal gewinnt?

Aufgabe 5 – Wahrscheinlichkeitsrechnung

[2 P] Am Bahnhof Luzern gibt es viele Velos. 60% davon sind Herrenvelos, von denen 70% abgeschlossen sind. Bei den Damenvelos sind 85% abgeschlossen. Eine Person fährt mit einem Velo davon, ohne es zuvor abgeschlossen zu haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um ein Damenvelo, falls die Person das Velo zufällig ausgewählt hätte?

Aufgabe 6 – Folgen und Reihen

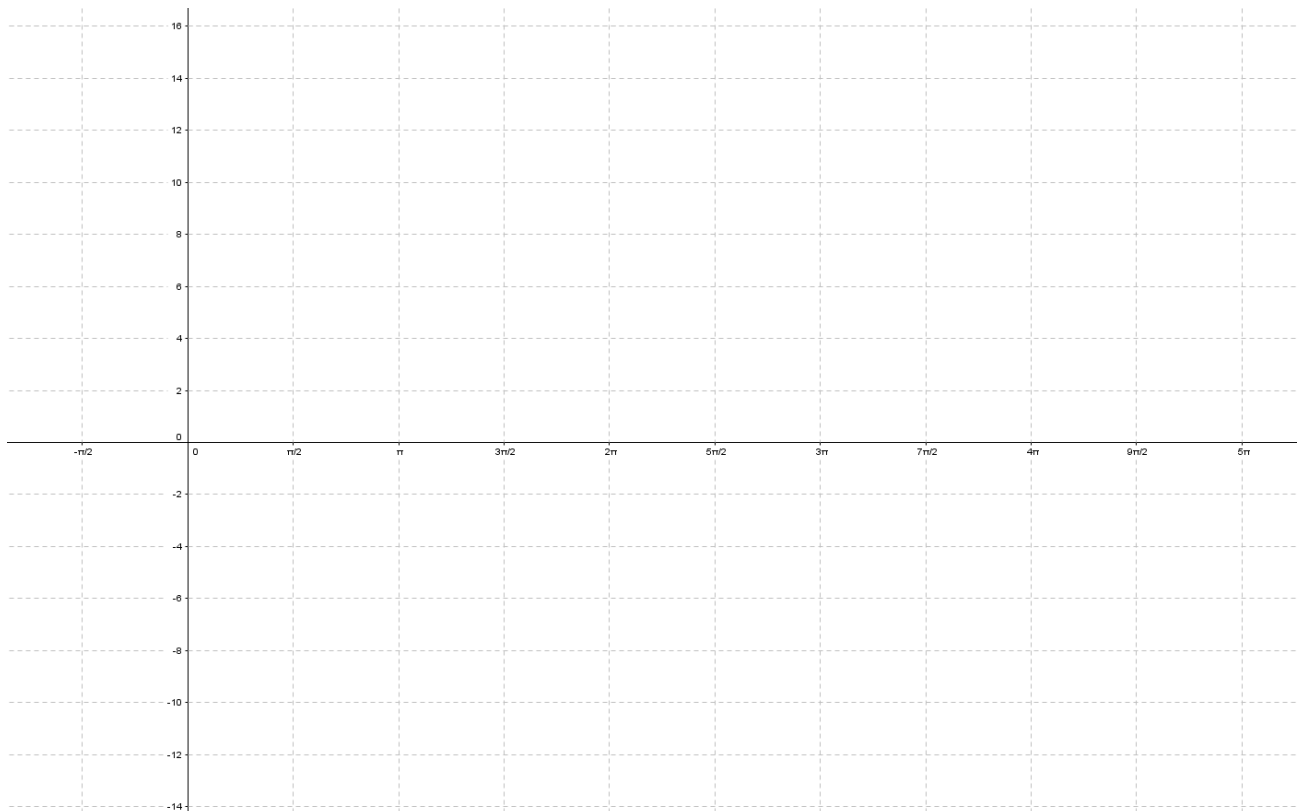
- a) **[2 P]** Der Mathematiker Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855) musste während seiner Schulzeit alle natürlichen Zahlen von 1 bis 100 addieren. Damals erhielt er die Summe 5050. Wie viele Zahlen hätte er addieren müssen, um auf die Summe 9730 zu kommen?
- b) **[2 P]** Peter baut in seinem Spielzimmer einen Turm aus Würfeln, als seine ältere Schwester ins Zimmer kommt. Der unterste Würfel hat eine Seitenlänge von 12 cm, der dritte von unten eine Seitenlänge von 8 cm. Die Schwester hat auch die anderen Würfel vermessen. Berechnen Sie die Höhe des Turms bestehend aus 5 Würfeln, wenn die Schwester herausgefunden hat, dass die Längen der Würfelkanten eine geometrische Folge bilden?
- c) **[2 P]** Halbkreise sollen in der nachstehenden Art zu einer Spirale zusammengesetzt werden (siehe Abbildung unten). Das Ganze ergibt ein Graffiti am Haus eines Mathematikers. Der erste Halbkreis hat einen Radius von 1 m, der Radius jedes folgenden Kreises beträgt 80 % des vorangehenden. Der kleinste Kreis, den Maler Pinsel auf der Hausmauer noch malen kann, hat einen Radius von 5 cm. Wie viele Kreise muss er malen, und welche Fläche bedecken all die Halbkreise insgesamt?



Aufgabe 7 – harmonische Schwingung

An der Lozärner Mäas steht ein Riesenrad deren Kabinen sich auf einem Kreis mit dem Durchmesser von 28 Metern bewegen. Es dauert 2π Minuten, bis es einmal ganz rundherum gefahren ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ Minuten befindet sich Peter exakt auf derselben Höhe wie der Mittelpunkt des Riesenrades und gewinnt an Höhe. Die Höhe $h(t)$ bezeichne die Höhe der Gondel von Peter über dem Mittelpunkt des Riesenrades zum Zeitpunkt t Minuten.

- [2 P]** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $h(t)$ in das untenstehende Koordinatensystem.
- [3 P]** Das KKL in Luzern hat eine Höhe von 21 Metern. Wie lange kann die Aussicht auf das Dach des KKL's bei einer Umdrehung genossen werden? Markieren Sie diese Lösung in Ihrer Skizze.
- [2 P]** Neben dem grossen Riesenrad steht noch ein kleineres mit dem Durchmesser 10 Meter. Dieses benötigt für eine Umdrehung 4π Minuten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ Minuten befindet sich Klara ebenfalls gerade auf der Höhe des Mittelpunktes, wobei sie an Höhe verliert. Bestimmen Sie graphisch, wie oft sich Peter und Klara in den ersten 10 Minuten genau auf derselben Höhe befinden.



Aufgabe 8 – Trigonometrie

[2 P] Luzern hat die geographische Breite 47° . Mit welcher Geschwindigkeit dreht sich Luzern um die eigene Achse? Der Radius der Erde beträgt $R = 6370$ km.

6 Musteraufgaben Lösungen

Aufgabe 1a

Ansatz $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Bedingungen $f(0) = 2$

$$f(2) = 4$$

$$f'(2) = 0$$

Gleichungen $c = 2$

$$16a + 4b + c = 4$$

$$32a + 4b = 0$$

Aufgabe 1b

$$f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x$$

$$f'_t(x) = x^2 - t^2$$

$$f''_t(x) = 2x$$

Extrema notwendige Bedingung $f'_t(x) = 0$

$$x^2 - t^2 = 0$$

$$x = \pm t$$

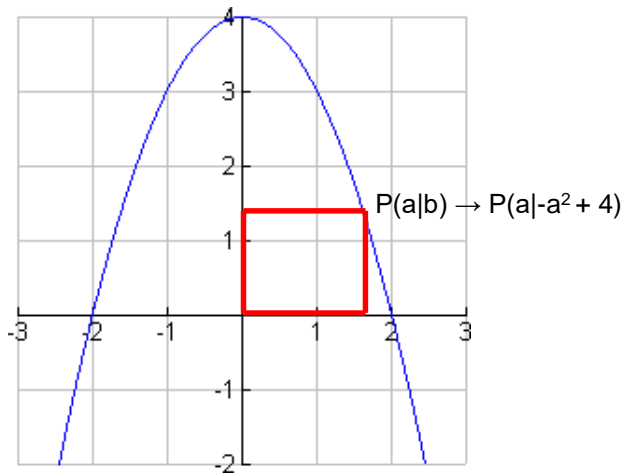
hinreichende Bedingung $f''_t(t) = 2t > 0$, falls $t > 0 \rightarrow$ Minimum

< 0 , falls $t < 0 \rightarrow$ Maximum

$f''_t(-t) = -2t > 0$, falls $t < 0 \rightarrow$ Minimum

< 0 , falls $t > 0 \rightarrow$ Maximum

Aufgabe 1c



Zielfunktion $U(a) = 2a + 2(-a^2 + 4)$
 $= -2a^2 + 2a + 8$

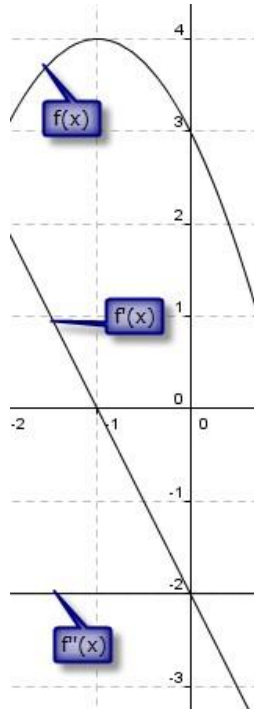
Optimierung $U'(a) = -4a + 2 = 0$
 $4a = 2$
 $a = 0.5$

Überprüfen $U''(a) = -4 \rightarrow$ Maximum unabhängig von a
 $a = 0.5; b = f(0.5) = 3.75 \rightarrow P(0.5/3.75)$

Aufgabe 1d

Links vom Hochpunkt hat der Graph der Funktion $f(x)$ eine positive Steigung $\rightarrow f'(x) > 0$, beim Hochpunkt die Steigung $0 \rightarrow f'(x) = 0$ und rechts davon negativ $\rightarrow f'(x) < 0$.

Die Steigung des Graphen von $f'(x)$ ist negativ ($m = -2$) \rightarrow Graph von $f'(x)$ ist eine horizontale Gerade.



Aufgabe 2a

a) Nullstellen: $ax^2 - x = 0$

$$x(ax - 1) = 0 \quad x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{a}$$

Flächeninhalt: $\int_0^{\frac{1}{a}} (ax^2 - x) dx = -\frac{8}{3}$

$$\left[\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\frac{1}{a}} = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{a^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} = -\frac{8}{3}$$

$$-\frac{1}{6a^2} = -\frac{8}{3}$$

$$3 = 48a^2$$

$$a = \pm \frac{1}{4} ; \underline{a = \frac{1}{4}} \quad (a > 0)$$

Aufgabe 2b

Wegen $h(20) = 10$ endet die Rampe im Punkte $P(20/10)$.

Aus der Ableitung $h'(t) = \frac{5}{2\sqrt{5t}}$ ergibt sich die Steigung 0.25.

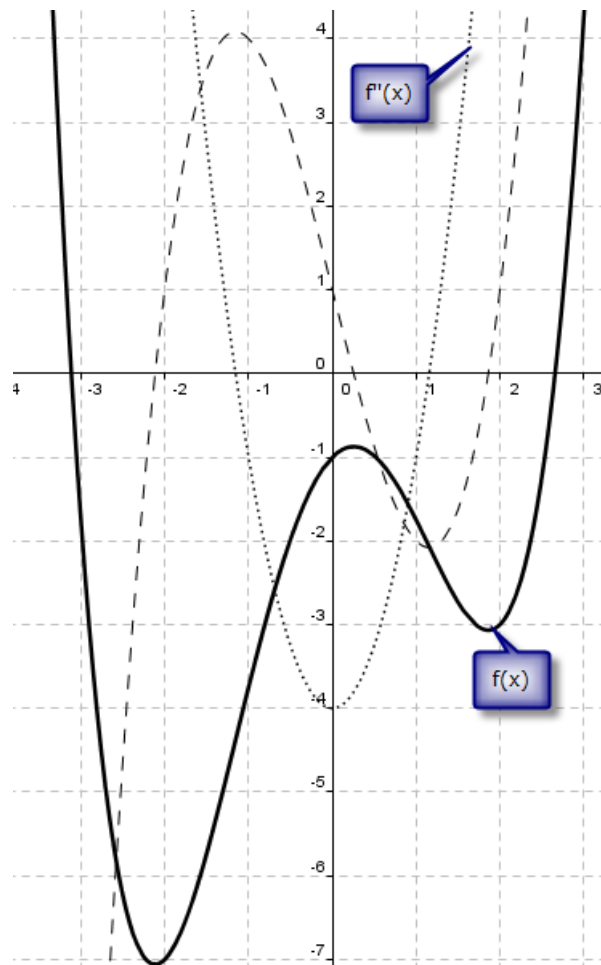
Die Funktionsgleichung der Tangente lautet dann $y = 0.25x + 5$.

Die schliesslich zu lösende Gleichung $h(t) = 0$ (Schnittpunkt mit der t-Achse) hat die Lösungsmenge $L = \{-20\}$.

Nach dem Satz von Pythagoras ergibt sich daraus die Länge $10 \sqrt{17}$.

Aufgabe 2c

- i. Falsch. Es gibt nur einen x-Wert mit $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$.
- ii. Dies ist nicht entscheidbar. Wäre möglich, muss aber nicht sein.
- iii. Falsch. Es gilt z.B. $f''(-0.5) < 0$.
- iv. Falsch. Es gibt keinen x-Wert in diesem Intervall bei welchem die Funktion f' den Wert 4 annimmt.
- v.



Aufgabe 17a

Bernoulli mit $p = 0.25$, $n = 6$ und $k = 5$ und 6

$$P(\text{mindestens 5 richtig}) = \binom{6}{5} \cdot 0.25^5 \cdot 0.75^1 + \binom{6}{6} \cdot 0.25^6 \cdot 0.75^0 = 0.004639$$

Aufgabe 3b

$P(\text{mindestens 1 Muster nicht richtig})$

$$= 1 - P(\text{kein Muster nicht richtig})$$

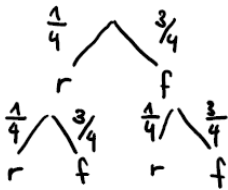
$$= 1 - P(\text{alle Muster richtig})$$

$$= 1 - (0.25)^{10}$$

$$= 0.999999$$

Aufgabe 3c

Bedingte Wahrscheinlichkeit

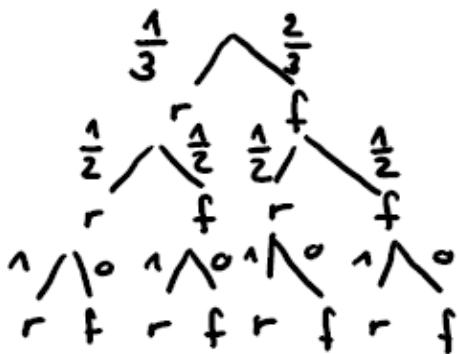


$$P(2. \text{ Karte richtig} | 1. \text{ Karte richtig}) = \frac{P(2. \text{ Karte richtig} \cap 1. \text{ Karte richtig})}{P(1. \text{ Karte richtig})} = \frac{0.25 \cdot 0.25}{0.25} = 0.25$$

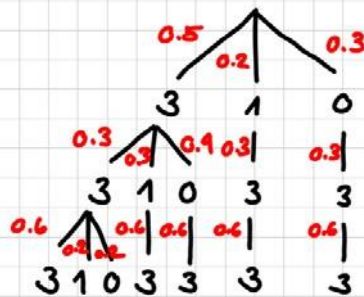
Aufgabe 3d

$P(\text{mindestens 2 Richtige}) = P(2 \text{ Richtige}) + P(3 \text{ Richtige}) =$

$$= 0.33333 \cdot 0.5 \cdot 1 + 0.66667 \cdot 0.5 \cdot 1 + 0.33333 \cdot 0.5 \cdot 1 = 0.66667$$



Aufgabe 4a



Schweiz - Honduras

Schweiz - Frankreich

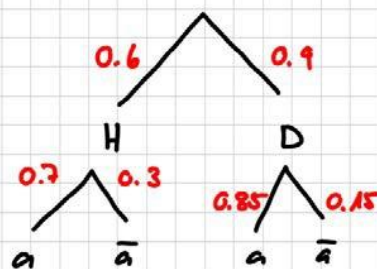
Schweiz - Ecuador

$$\begin{aligned}
 P(\text{mehr als 5 Punkte}) &= 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.2 + \\
 &\quad + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.9 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + \\
 &\quad + 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.6 = \underline{0.45}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4b

$$\begin{aligned}
 P(\text{mind. zweimal gewinnen}) &= 1 - P(\text{nie gewinnen}) - P(1 \times \text{gewinnen}) = \\
 &= 1 - \binom{8}{0} \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^8 - \binom{8}{1} \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^7 = 0.7447 \approx \underline{74.5\%}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 19



$$\begin{aligned}
 \underline{P(D|\bar{a})} &= \frac{P(D \cap \bar{a})}{P(\bar{a})} = \\
 &= \frac{0.4 \cdot 0.15}{0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.15} = \underline{0.25}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 20a

$$1 + 2 + 3 + \dots + a_n = 9730 \quad \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = 1 \\ s_n = 9730 \end{array}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad ; \quad s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n-1)d)$$

$$9730 = \frac{n}{2} (1 + 1 + (n-1) \cdot 1) = \frac{n}{2} (1+n) \cdot 2$$

$$19460 = n + n^2$$

$$0 = n^2 + n - 19460$$

$$n_1 = -140$$

$$n_2 = 139 \quad \rightarrow \underline{\underline{139 \text{ Zahlen}}}$$

Aufgabe 6b

$$\begin{array}{l} a_1 = 12 \text{ cm} \\ a_3 = 8 \text{ cm} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \cdot q^2 \quad q = \sqrt{\frac{8}{12}} \approx 0.8165$$

$$\underline{\underline{s_5}} = a_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = 12 \cdot \frac{1 - 0.8165^5}{1 - 0.8165} \approx \underline{\underline{41.66 \text{ cm}}}$$

Aufgabe 6c

$$a_n = 0.05 \text{ cm} = a_1 \cdot q^{n-1}$$

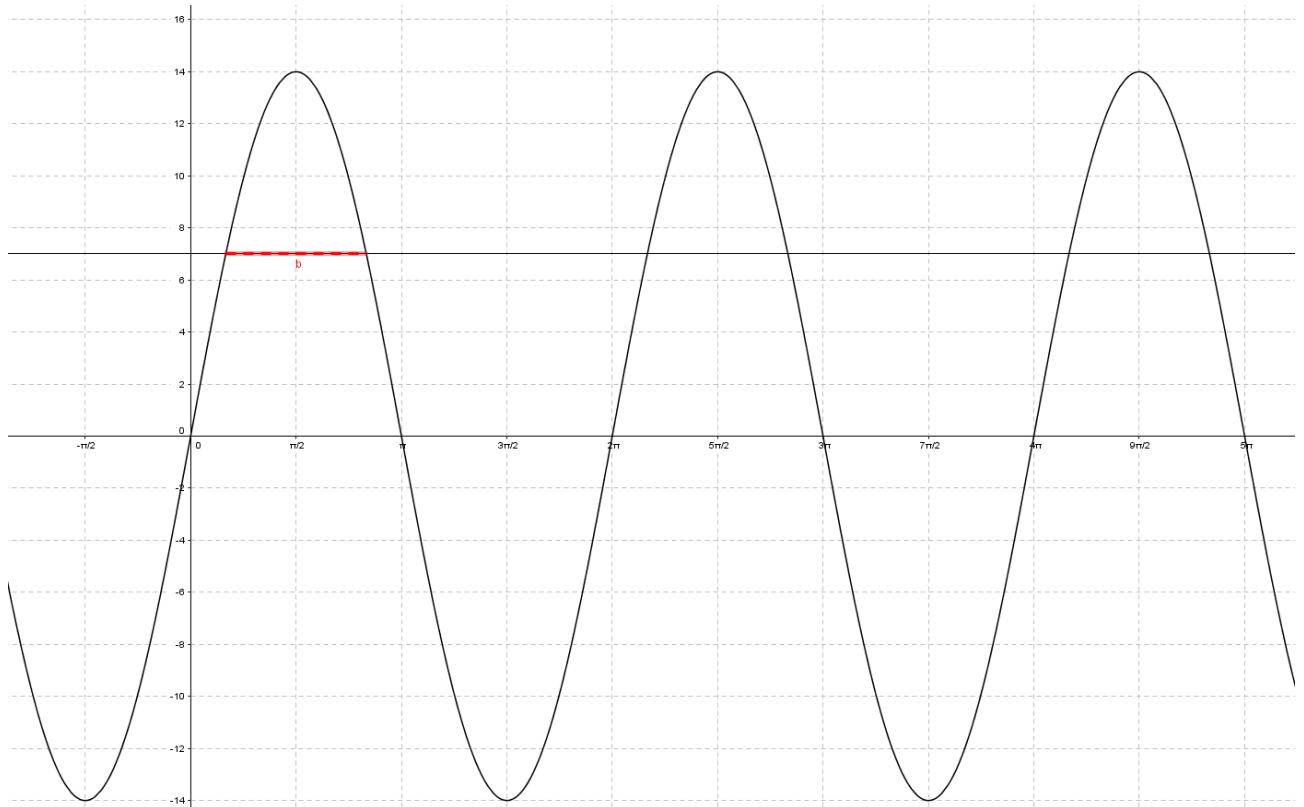
$$n = \frac{\ln\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\ln(q)} + 1 = 19.4 \quad \Rightarrow \underline{\underline{19 \text{ Kreise}}}$$

$$A_1 = a_1^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_2 = (a_1 \cdot q)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = a_1^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot q^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{s_{19}}} = 12^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 0.169^{19}}{1 - 0.169} = 1.386 \pi \text{ m}^2 = \underline{\underline{4.355 \text{ m}^2}}$$

Aufgabe 7a



Aufgabe 7b

$$h(t) = 14 \cdot \sin(x)$$

$$7 = 14 \cdot \sin(x)$$

$$\frac{1}{2} = \sin(x)$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

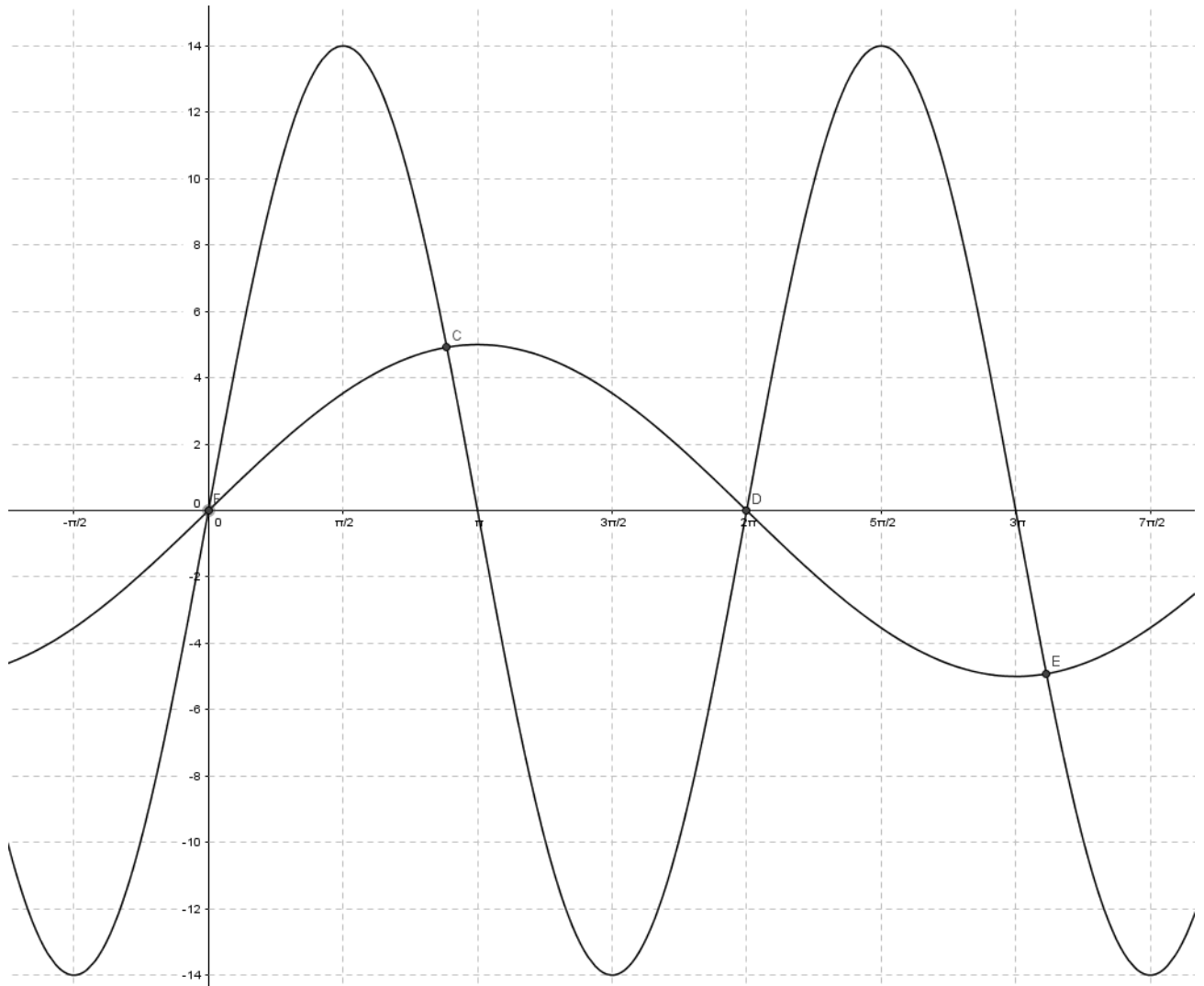
$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$



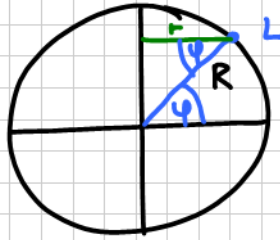
$$\underline{b} = x_2 - x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3} \text{ min}}}$$

Aufgabe 7c

4mal inklusive Start



Aufgabe 8



$$\begin{aligned}\cos(\varphi) &= \frac{r}{R} ; r = R \cdot \cos(\varphi) = \\ &= 6370 \cdot \cos(47^\circ) \approx \\ &\approx 4344,3 \text{ km}\end{aligned}$$

$$u = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 4344,3 \approx 27'296,2 \text{ km}$$

$$\underline{v} = \frac{u}{t} = \frac{27'296,2 \text{ km}}{24\text{h}} \approx \underline{\underline{1137,3 \text{ km/h}}} (!)$$